UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dept. Computación y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas II
CI 2526
Mayo-Julio 2021

Práctica 10
Soluciones
Gustavo Lau
2021-07-24

Comentario de la clase pasada:

Cuando trabajamos módulo n reemplazamos los números por sus restos módulo n: $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Formalmente: esos son los elementos representantes de las clases de equivalencia $[0], [1], [2], \ldots, [n-1]$.

1. Dados dos conjuntos A y B, se dice que la función $f : A \to B$ es constante si $(\exists b \in B)(\forall a \in A)(f(a) = b)$. Demuestre lo siguiente:

   Dadas las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, si f es constante, entonces $g \circ f : A \to C$ es constante.

   Respuesta

   Sea u el valor constante de f, es decir el valor u tal que

   $$(\forall a \in A)(f(a) = u)$$

   Sea $v = g(u)$. Para cualquier $a \in A$ tenemos:

   $$\begin{aligned} g \circ f(a) &= g(f(a)) \\ &= g(u) \\ &= v \end{aligned}$$

   Entonces:

   $$(\exists c \in C)(\forall a \in A)\ (g \circ f(a) = c)$$

   $\therefore g \circ f$ es constante

2. **Definiciones:** Sea f una función de A en B, $f : A \to B$:

   f es inyectiva $\equiv f(a) = f(b) \implies a = b$

   f es sobreyectiva $\equiv (\forall b \in B)\ (\exists a \in A)\ (f(a) = b)$

   f es sobreyectiva $\equiv b \in B \implies (\exists a \in A)\ (f(a) = b)$

f es biyectiva $\equiv f$ es inyectiva y sobreyectiva

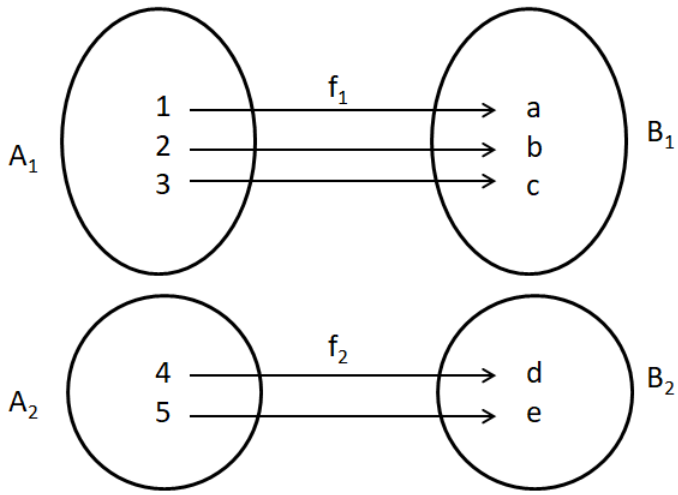
Sean A_1, A_2, B_1, B_2 conjuntos no vacíos tales que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ y $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Demuestre que si $f_1 : A_1 \to B_1$ y $f_2 : A_2 \to B_2$ son funciones biyectivas y definimos $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ como

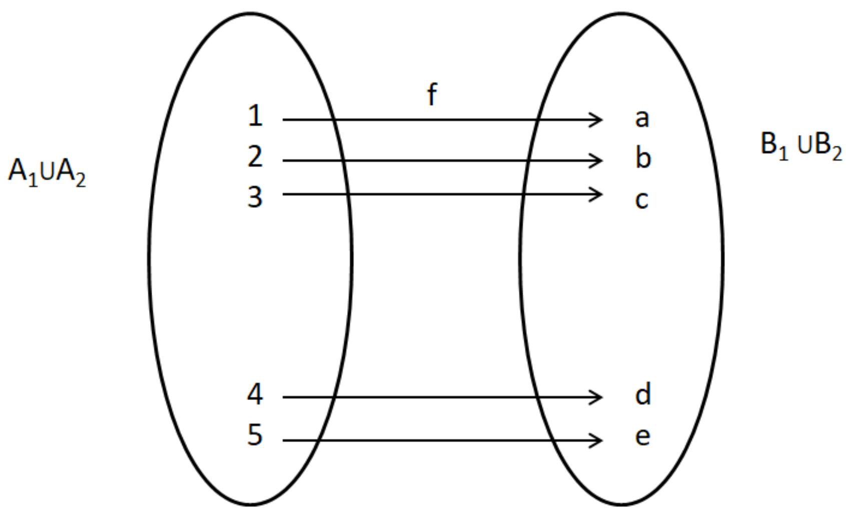
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si \quad x \in A_1 \\ f_2(x) & si \quad x \in A_2 \end{cases}$$

entonces f es biyectiva.

Respuesta

Para verlo intuitivamente usamos un par de diagramas:





Demostración de que f es inyectiva:

$$
\begin{aligned}
& a,b \in A_1 \cup A_2 \wedge f(a) = f(b) \\
\Longrightarrow \quad & \langle f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2 \rangle \\
& a,b \in A_1 \cup A_2 \wedge f(a) = f(b) \in B_1 \cup B_2 \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{Definición de unión} \rangle \\
& (a,b \in A_1 \cup A_2 \wedge f(a) = f(b) \in B_1) \vee (a,b \in A_1 \cup A_2 \wedge f(a) = f(b) \in B_2) \\
\Longrightarrow \quad & \langle A_1 \cap A_2 = \varnothing \wedge B_1 \cap B_2 = \varnothing \rangle \\
& (a,b \in A_1 \wedge f(a) = f(b) \in B_1) \vee (a,b \in A_2 \wedge f(a) = f(b) \in B_2) \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{Definición de } f \rangle \\
& (a,b \in A_1 \wedge f_1(a) = f_1(b)) \vee (a,b \in A_2 \wedge f_2(a) = f_2(b)) \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{f}_1 \text{ y } f_2 \text{ son inyectivas} \rangle \\
& (a = b) \vee (a = b) \\
\Longrightarrow \quad & \\
& a = b \\
\therefore \; & f(a) = f(b) \implies a = b \\
\therefore \; & f \text{ es inyectiva.}
\end{aligned}
$$

Demostración de que f es sobreyectiva:

$$
\begin{aligned}
& b \in B_1 \cup B_2 \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{Definición de unión} \rangle \\
& b \in B_1 \vee b \in B_2 \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{f}_1 \text{ y } f_2 \text{ son sobreyectivas} \rangle \\
& (\exists a \in A_1 \; (f_1(a) = b)) \vee (\exists a \in A_2 \; (f_2(a) = b)) \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{Definición de } f \rangle \\
& (\exists a \in A_1 \cup A_2) \; (f(a) = b) \\
\therefore \; & (\forall b \in B_1 \cup B_2) \; (\exists a \in A_1 \cup A_2) \; (f(a) = b) \\
\therefore \; & f \text{ es sobreyectiva.}
\end{aligned}
$$

$\therefore f$ es biyectiva.

3. **Definiciones:**

Imagen de un conjunto. Sea f una función de A en B y sea A' un subconjunto de A, se define la imagen de A' mediante f como el conjunto de los elementos de B que son imágenes de algún elemento de A'. Simbólicamente:

$$f(A') = \{y \in B : \exists x \in A' \; (f(x) = y)\}$$

Imagen inversa o preimagen. Dada una función $f : A \to B$ y $B' \subseteq B$, se define la imagen inversa, o preimagen, de B' mediante f como el conjunto de los elementos de A cuyas imágenes mediante f pertenecen a B'. Simbólicamente:

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

Sea $f : A \to B$ y $Y \subseteq B$. Demuestre que si f es sobreyectiva entonces $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Respuesta

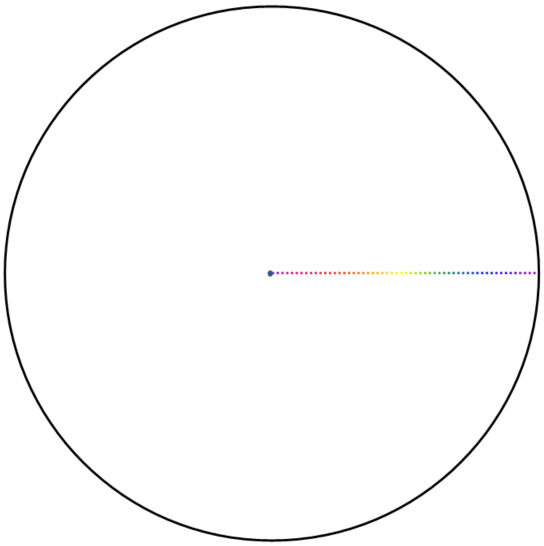
Por doble contención:

$$\begin{aligned}
& y \in f(f^{-1}(Y)) \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{Definición de imagen} \rangle \\
& \exists x \in f^{-1}(Y)\ (f(x) = y) \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{Definición de preimagen} \rangle \\
& \exists x \in A\ (f(x) \in Y \wedge f(x) = y) \\
\Longrightarrow \quad & \\
& y \in Y \\
\therefore\ & f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y \in Y \\
\Longrightarrow \quad & \langle f \text{ es sobreyectiva} \rangle \\
& \exists x \in A\ (y = f(x)) \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{Definición de preimagen} \rangle \\
& \exists x \in A\ (y = f(x) \wedge x \in f^{-1}(\{y\})) \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{Definición de imagen} \rangle \\
& y \in f(f^{-1}(\{y\})) \\
\Longrightarrow \quad & \langle \{y\} \subseteq Y \rangle \\
& y \in f(f^{-1}(Y)) \\
\therefore\ & Y \subseteq f(f^{-1}(Y))
\end{aligned}$$

$\therefore f(f^{-1}(Y)) = Y$

4. Imagínense 60 puntos yendo en círculos concéntricos en el sentido de las agujas del reloj y comenzando a la hora 3. El punto 1, el más alejado del centro, va a 1 revolución por minuto (rpm), el punto 2 a 2 rpm y así sucesivamente hasta el punto 60, el más cercano al centro, que va a 60 rpm.



¿Dónde estarán los puntos luego de 1 minuto?

¿Dónde estarán los puntos luego de 1/2 minuto?

¿Dónde estarán los puntos luego de 1/3 minuto?

¿Dónde estarán los puntos luego de 1/4 minuto?

Respuesta

Luego de 1 minuto todos estarán de vuelta en su posición original (hora 3).

Luego de 1/2 minuto los puntos pares estarán de vuelta en su posición original (hora 3) y los impares a la hora 9.

Luego de 1/3 minuto los puntos múltiplos de 3 estarán de vuelta en su posición original (hora 3), los puntos $3n + 1$ (1 módulo 3) estarán a la hora 7 y los puntos $3n + 2$ (2 módulo 3) a la hora 11.

Luego de 1/4 minuto los puntos múltiplos de 4 estarán de vuelta en su posición original (hora 3), los puntos $4n + 1$ (1 módulo 4) estarán a la hora 6, los puntos $4n + 2$ (2 módulo 4) estarán a la hora 9 y los puntos $4n + 3$ (3 módulo 4) a la hora 12.

Ver http://whitneymusicbox.org/index.php?var=v11

Ondas de péndulos:

Algo similar se puede hacer con péndulos.

Cada sucesivo péndulo es más corto y ajustado de manera tal que realiza una oscilación adicional en un período 1 minuto.

Ver http://www.youtube.com/watch?v=yVkdfJ9PkRQ

5. Sea $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Demuestre que si $g \circ f : A \to C$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

Respuesta

$$\begin{aligned}
& f(a) = f(b) \\
\Longrightarrow & \quad \langle g \text{ es una función} \rangle \\
& g(f(a)) = g(f(b)) \\
\Longrightarrow & \quad \langle \text{Definición de } g \circ f \rangle \\
& g \circ f(a) = g \circ f(b) \\
\Longrightarrow & \quad \langle g \circ f \text{ es una función inyectiva} \rangle \\
& a = b \\
\therefore & \ f(a) = f(b) \implies a = b \\
\therefore & \ f \text{ es inyectiva}
\end{aligned}$$

6. Halle una biyección entre el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en F y el conjunto F^{n+1}

Respuesta

Si A =Conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en F entonces:

$$\begin{aligned}
A &= \{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n | \forall i \ c_i \in F\} \\
F^{n+1} &= \{(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) | \forall i \ c_i \in F\}
\end{aligned}$$

La biyección $f : A \to F^{n+1}$ es

$$f(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n) = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Demostración de que f es inyectiva: Supongamos que $a, b \in A$ y que

$$\begin{aligned}
a &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \\
b &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
& f(a) = f(b) \\
\Longrightarrow & \ \langle \text{Definición de } f \rangle \\
& (a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n) = (b_0, b_1, b_2 \ldots, b_n) \\
\Longrightarrow & \quad \langle \text{Dos elementos de } F^{n+1} \text{ son iguales si y sólo si todas sus coordenadas son iguales} \rangle \\
& \forall i \ a_i = b_i \\
\Longrightarrow & \\
& a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n \\
\Longrightarrow & \\
& a = b \\
\therefore & \ f(a) = f(b) \implies a = b \\
\therefore & \ f \text{ es inyectiva.}
\end{aligned}$$

Demostración de que f es sobreyectiva: Sea $b = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ un elemento arbitrario de F^{n+1} entonces el polinomio

$a = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$

pertenece a A y $f(a) = b$.

$\therefore\ (\forall b \in B)\ (\exists a \in A)\ (f(a) = b)$

$\therefore\ f$ es sobreyectiva.

$\therefore\ f$ es biyectiva.

7. La función de Fibonacci esta definida como $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en donde

$$f(n) = \begin{cases} 0 & si \quad n = 0 \\ 1 & si \quad n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

¿Es la función de Fibonacci inyectiva o sobreyectiva?

Respuesta

Es fácil calcular que:

$$\begin{aligned} f(2) &= 1 \\ f(3) &= 2 \\ f(4) &= 3 \\ f(5) &= 5 \end{aligned}$$

Para hacer las demostraciones formales conviene demostrar que f es una función estrictamente creciente y positiva para $n \geq 2$.

Demostración de que $\forall n \geq 2 \;\; 0 < f(n) < f(n+1)$:

Por inducción:

Caso base:

$$\begin{aligned} & 0 < 1 < 2 \\ \Longrightarrow & \\ & 0 < f(2) < f(3) \end{aligned}$$

Paso inductivo:

Supongamos que $0 < f(n) < f(n+1)$ y $n > 2$, entonces por definición

$$\begin{aligned} & f(n+2) = f(n+1) + f(n) \\ \Longrightarrow & \quad \langle \text{Hipótesis inductiva: } f(n) > 0 \rangle \\ & f(n+2) > f(n+1) \\ \Longrightarrow & \quad \langle \text{Hipótesis inductiva: } f(n+1) > 0 \rangle \\ & 0 < f(n+1) < f(n+2) \end{aligned}$$

Como $f(5) > 4$ y la función f es creciente para $n \geq 2$, no existe ningún n tal que $f(n) = 4$, por lo tanto f no es sobreyectiva.

Demostración de que f es inyectiva:

$$
\begin{aligned}
& f(a) = f(b) \\
\Longrightarrow\ & \langle f \text{ es una función estrictamente creciente} \rangle \\
& a = b \\
\therefore\ & f(a) = f(b) \implies a = b \\
\therefore\ & f \text{ es inyectiva.}
\end{aligned}
$$